بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر
www.tafrihicenter.ir/edu
کلیک کنید
نمونه سوال
گام به گام
امتحان نهایی
جزوه
دانلود آزمون های آزمایشی
متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم
متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم
www.tafrihicenter.ir

درس اول : مبانی احتمال

کار در کلاس صفحه ۴۱

کدام‌یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱-می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟		×
۲-درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟	×	
۳-۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟		×
۴-در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴ ، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟		×
۵-چه تعداد از دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟	×	

فعالیت صفحه ۴۱

برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی، به‌ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اولی سه لامپ و در دومی۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به‌تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است: در جعبه اول ۶۰ درصد و در جعبه دوم ۶۵ درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبه دوم را انتخاب کند.

کار در کلاس صفحه ۴۲

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه‌ی اول مذکور انتخاب کرد؟

۵ حالت برای انتخاب لامپ اول داریم و ۴ حالت برای انتخاب لامپ دوم. با توجه به اصل دکارتی ضرب کلاً $= ۴ \times ۵$ ۲۰ حالت وجود دارد.

در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ مشابه همین سؤال ها را در مورد جعبه دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه رابرای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چون می‌خواهیم لامپ‌ها معیوب باشند برای انتخاب اول ۲ حالت داریم و برای انتخاب دوم یک حالت باقی می‌ماند بنابراین $۲ = ۱ \times ۲$ حالت داریم.

در مورد جعبه دوم انتخاب دو لامپ از بین ۲۰ لامپ را داریم : $۳۸۰ = ۱۹ \times ۲۰$ و چون ۷ لامپ معیوب است. تعداد $۴۲ = ۶ \times ۷$ حالت برای معیوب بودن دو لامپ داریم. احتمال معیوب بودن در جعبه اول $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۲}{۱۰}$ و در جعبه ی دوم $\frac{۴۲}{۳۸۰}$ بنابراین انتخاب جعبه اول بهتر است.

کار در کلاس صفحه ۴۳

زهرا و شبنم در مورد سؤالی که دربارهی پرتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟ شبنم درست می‌گوید.

- زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعه‌ی $\{۶ , ... , ۲ , ۱\}$ است.
- شبنم: بله، من هم موافق هستم. سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد $\{۶ , ۴ , ۲\}$ رخ داده است؟
- زهرا: به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند.
- شبنم: ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۲ است.
- زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبنم: یعنی باید آنها هم در پرتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً اینطور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{۶ , ۴ , ۲\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟!

کار در کلاس صفحه ۴۶

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱-دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید، ناسازگارند.

A: متولد ماه مهر باشد،

B: متولد فصل تابستان باشد.

۲-سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید، سازگارند.

A: هر سه بار مشابه بیاید،

B: زوج بار رو بیاید.

۳-فردا سازگارند.

A: خورشید در آسمان دیده شود.

B: باران ببارد.

۴- تاسی را پی در پی پرتاب می‌کنید، ناسازگارند.

A: برای اولین بار در مرتبه‌ی سوم ۶ بیاید،

B: تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

تمرین صفحه ی ۴۷

۱. احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده‌ی بازی است؟

{(سنگ و قیچی) (سنگ و کاغذ) (قیچی و کاغذ) (کاغذ و کاغذ) (کاغذ و قیچی) (قیچی و قیچی) (قیچی و سنگ)
(کاغذ و سنگ) (سنگ و سنگ)}

$\frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$ $\quad\quad$ $۳^۲ = ۹$

۲. یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می‌شود، بلندقدترین عضو تیم باشد چقدراست؟

$\frac{۱}{۱۴}$

۳. در یک ایستگاه هواشناسی، در هرلحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

{گرم و سرد} × {مرطوب و خشک} × {باد نمی‌ورزد , باد می‌وزد} × {صاف ،نیمه ابری ،ابری}
× {بارندگی رخ نداده ،بارندگی رخ} = ۲ × ۲ × ۲ × ۳ × ۲ = ۴۸

۴. فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A-B) = P(A) - P(B)$

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(B)$$
$$B \subseteq A \Rightarrow A\cap B = B \Rightarrow P(A\cap B) = P(B)$$

ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(B) \le P(A)$

$$B \subseteq A \Rightarrow B \le A \Rightarrow P(B) \le P(A)$$

۵. عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:

تمامی اعداد زوج ۵۰ تا= $P(A)$

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

$P(A) = ۵۰ \quad P(B) = ۳۳ \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) = ۵۰ + ۳۳ = ۸۳$

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش‌پذیر نباشد.

$P(C) = ۵۰ - ۱۶ = ۳۴$

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.

$P(D) = ۱۰۰ - ۸۳ = ۱۷$

درس دوم : احتمال غیر هم‌شانس

فعالیت صفحه ۴۸

یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱-فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$S = \{۱ , ۲ , ۳\}$

۲-با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به دست آورید.

$A = \{۱\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶}$

آیا می توانید از رابطه‌ی $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟چرا؟

خیر، زیرا اعضای آن هم شانس نیستند.

۳-مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از تاس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B = \{۲\}$ و $C = \{۳\}$ رابه‌دست آورید.

$P(۲) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \quad , \quad P(۳) = \frac{۱}{۶}$

۴-آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A ، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید.

خیر، زیرا پیشامدها غیر هم‌شانس هستند.

۵- به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

$P(۱) + P(۲) + P(۳) = \frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱$

۶-اگر $D = \{۱ , ۲\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به‌دست آورید. این مقدار را با $P(۱) + P(۲)$ مقایسه کنید.

$P(D) = \frac{۵}{۶}$

با توجه به اینکه سه وجه تاس عدد ۱ و دو وجه تاس عدد ۲ است، در پرتاب تاس اگر یکی از ۵ وجه مذکور ظاهر شود، پیشامد D رخ می‌دهد :

$P(۱) + P(۲) = \frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۶} = \frac{۵}{۶}$

کار در کلاس صفحه ۵۰

۱-در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x, y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x, z\})=\frac{۱}{۲}$ احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

با توجه به اینکه x، y و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند، بنابراین $P(x)+P(y)+P(z)=۱$. پس خواهیم داشت :

$$\begin{cases} P(x)+P(y)+P(z)=۱ \\ P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۳}+P(z)=۱ \Rightarrow P(z)=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \boxed{P(z)=\frac{۱}{۳}}$$

$$P(x)+P(z)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(x)+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow P(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow \boxed{P(x)=\frac{۱}{۶}}$$

$$P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۶}+P(y)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow P(y)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{P(y)=\frac{۱}{۲}}$$

۲-یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به‌دست آورید.

$P(a)=۳P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. حال اگر $P(۱)=x$ و $P(۲)=۳x$

خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}
&P(۱)=P(۳)=P(۵) \\
&P(۲)=P(۴)=P(۶) \\
&P(S)=۱ \Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱ \\
&\Rightarrow x+۳x+x+۳x+x+۳x=۱ \\
&\Rightarrow ۱۲x=۱ \\
&\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} P(۳)=\frac{۱}{۱۲} \\ P(۲)=۳\times\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow P(۲,۳)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \boxed{P(۲,۳)=\frac{۱}{۳}}$$

تمرین های صفحه ۵۱

۱. در پرتاب یک سکه‌ی ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

برای سکه سالم: $P(\text{رو}) = \frac{۱}{۲}$ $\quad P(\text{زیر}) = \frac{۱}{۲}$

برای سکه ناسالم: $P(\text{رو}) = \frac{۱}{۲} P(\text{زیر}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

۲. در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده‌ی هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

$S = ۶ \quad A = \{۱,۲,۳\} \quad P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

۳. اگر $\{S = \{a, b, c, d, e$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $\{a, b\}$ = A , $\{a, b, c, d\}$ = B و $C = \{a, b, c\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{۲}{۷}$ و $P(B) = \frac{۲}{۵}$ مقدار $P(C')$ را به دست آورید.

$P(C) = \frac{۳}{۵} \qquad P(\acute{C}) = ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵}$

۴. در یک تجربه‌ی تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$, $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به دست آورید.

$P(z) = \frac{۱}{۴}P(y) \quad P(y) = \frac{۱}{۴}P(x) \quad P(z) = \frac{۱}{۱۶}P(x)$

$$\begin{cases} P(x) + \frac{۱}{۴}P(x) + \frac{۱}{۱۶}P(x) \\ P(x) + P(y) + P(z) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \frac{۲۱}{۱۶}P(x) = ۱$$

$P(x) = \frac{۱۶}{۲۱} \quad P(z) = \frac{۱}{۲۱} \quad P(y) = \frac{۴}{۲۱}$

۵. در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[۱].
فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه‌ی اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه‌ی k ام، $x(۲k - ۱)$ باشد:

[۱] مرز مشترک بین دو ناحیه را جزئ ناحیه‌ی کوچک‌تر محسوب کنید.

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

؟؟؟؟؟؟؟؟

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیه‌ی دوم یا پنجم؟ اول، سوم یا چهارم بیشتر است

$$P(۱) = x$$

$$\vdots$$

$$P(k) = ۲k - ۱$$

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)=۱ \quad x+۳x+۵x+۷x+۹x=۱ \Rightarrow ۲۰x=۱ \quad x=\frac{۱}{۲۰}$$

$$P(۱)=\frac{۱}{۲۰} \quad P(۲)=\frac{۳}{۲۰} \quad P(۳)=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴} \quad P(۴)=\frac{۷}{۲۰} \quad P(۵)=\frac{۹}{۲۰}$$

$$P(۱)+P(۳)+P(۴)=\frac{۱}{۲۰}+\frac{۵}{۲۰}+\frac{۷}{۲۰}=\frac{۱۳}{۲۰}$$

$$P(۲)+P(۵)=\frac{۳}{۲۰}+\frac{۵}{۲۰}=\frac{۸}{۲۰}$$

درس سوم : احتمال شرطی

فعالیت صفحه ۵۲

۱- در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰ یکی را به تصادف انتخاب کنند. شمارهی کارت اکبر ۱۵ و شماره کارت بهرام ۷ است.

الف)احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

احتمال برنده شدن هر دو با هم برابر است و مساوی با $\frac{۱}{۲۰}$ می‌باشد.

ب)وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید: «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

احتمال برنده شدن بهرام صفر است چون شماره کارت او دو رقمی نیست و اکبر احتمال برنده شدن خود را $\frac{۱}{۱۱}$ می‌داند زیرا ۱۱ عدد از اعداد روی کارت‌ها دو رقمی است.

۲- در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، با نام‌های ۱ـ۱۱ ، ۲ـ۱۱ و ۳ـ۱۱ وجود دارد که به‌ترتیب۳۲ ،۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به‌ترتیب ۸ ، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره‌ی کامل شده‌اند. یکی از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف)فضای نمونه که شامل همه‌ی دانش‌آموزان پایه یازدهم است، چند عضوی است؟

$S = \{s_1, s_2, s_3\} = ۳۲ + ۳۳ + ۳۵ = ۱۰۰$

ب)احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمره‌ی کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟

$P(A) = \frac{۲۳}{۱۰۰}$ $\qquad$ $۸ + ۹ + ۶ = ۲۳$ $\qquad$ ۲۳ نفر موفق به کسب نمره کامل شده‌اند .

پ)احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱ـ ۱۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟

$P(B) = \frac{۳۲}{۱۰۰}$ $\qquad$ $n(B) = ۳۲$

ت)فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱ـــ ۱۱ است. در این صورت،چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمره‌ی کامل شده باشد؟

در حل قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ است، به فضای نمونه‌ی دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ـ ۱۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ موفق به کسب نمرهی

کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد $A \cap B$ را بشماریم. نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعه‌ی B تقسیم کنیم.

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{۸}{۳۲} = \frac{۱}{۴}$$

کار در کلاس صفحه ۵۲

در فعالیت «قرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟

احتمال برنده شدن نسبت به پیشامد دو رقمی بدون شماره کارت.

کار در کلاس صفحه ۵۲

فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف)فضای نمونه این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟

فضای نمونه آزمایش۳۶ = ۶ × ۶ عضوی می‌باشد که این فضای احتمال هم‌شانس است.

ب)می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست‌کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

$$S = \{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$
$$A = \{(۴,۶),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$
$$P(A) = \frac{۵}{۶}$$

فعالیت صفحه ۵۴

دوباره فرض کنید موضوع گفت‌وگوی احتمال هم‌شانس باشد: آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B) / n(S)}{n(B) / n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

کار در کلاس صفحه ۵۵

در فعالیت مربوط به دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم که سه کلاس ۱ـ۱۱ ، ۲ـ۱۱ و ۳ـ۱۱ به‌ترتیب ۳۲ ، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند و در آزمونی مشترک در این سه کلاس، به‌ترتیب ۸ ، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره‌ی کامل شده‌اند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ بودن» را B_1 می‌نامیم و B_2 و B_3 را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می‌دهیم.

الف)مقدار $P(A \mid B_i)$ را برای $i = 1,2,3$ محاسبه کنید.

$$P(A \mid B_1) = \frac{n(A \cap B_1)}{n(B_1)} = \frac{8}{32}$$

$$P(A \mid B_2) = \frac{n(A \cap B_2)}{n(B_2)} = \frac{9}{33}$$

$$P(A \mid B_3) = \frac{n(A \cap B_3)}{n(B_3)} = \frac{6}{35}$$

ب) مقدار $P(B_i \mid A)$ را برای $i = 1,2,3$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

$$P(B_1 \mid A) = \frac{n(B_1 \cap A)}{n(B_1)} = \frac{8}{23}$$

$$P(B_2 \mid A) = \frac{n(B_2 \cap A)}{n(B_2)} = \frac{9}{23}$$

$$P(B_3 \mid A) = \frac{n(B_3 \cap A)}{n(B_3)} = \frac{6}{23}$$

$P(B_i \mid A)$ احتمال اینکه دانش‌آموزی از کلاس B_i باشد به شرط آنکه نمره‌ی کامل را بیاورد، نشان می‌دهد. که جواب این احتمال میزان موفقیت هر کلاس را بیان می‌کند.

پ)با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟

کلاس ۱ـ۱۱

برای پاسخ دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟ پاسخ قسمت (الف)

کار در کلاس صفحه ۵۶

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید :

الف)اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند:

$$P\left((A_1 \cup A_2)\middle|B\right) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

ابتدا بررسی می‌کنیم که دو پیشامد $A_1 \cap B$ و $A_2 \cap B$ ناسازگارند:

$$\xRightarrow[\text{ناسازگارند}]{\text{طبق فرض } A_1 \text{ و } A_2} A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = (A_1 \cap A_2) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

حال داریم :

$$P\left((A_1 \cup A_2)|B\right) = \frac{P\left((A_1 \cup A_2) \cap B\right)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{P\left((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\right)}{P(B)} = \frac{P\left((A_1 \cap B)\right)}{P(B)} + \frac{P\left((A_2 \cap B)\right)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

ب)برای هر پیشامد A داریم : $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

$$P\left((A \cup A')\,|\,B\right) = P(A|B) + P(A'|B) \qquad (1)$$

از طرفی می‌داتیم :

$$A \cup A' = S \Rightarrow P\left((A \cup A')\,|\,B\right) = P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 1 = P(A|B) + P(A'|B) \Rightarrow P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

کار در کلاس صفحه ۵۷

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اولی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

A : پیشامد سبز بودن گوی اول

B : پیشامد سفید بودن گوی دوم

C : پیشامد قرمز بودن گوی سوم

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$$

فعالیت صفحه ۵۸

دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را برمی‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم.

سه پیشامد A ، B_1 و B_2 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : گوی برداشته شده سفید است.

B_1 : کیسه‌ی اول انتخاب شده است.

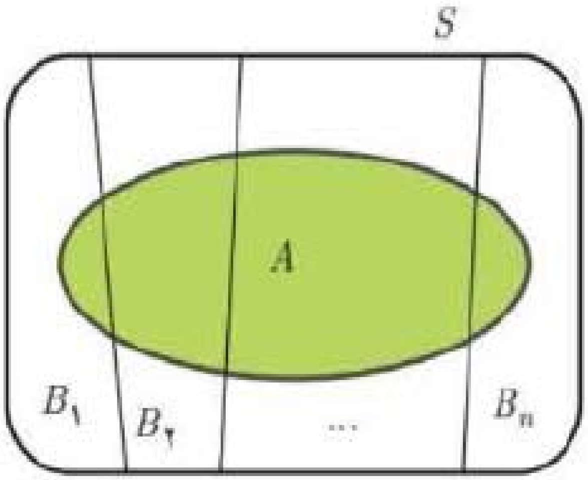
B_2 : کیسه‌ی دوم انتخاب شده است.

پس هدف محاسبه $P(A)$ است. طبق اطلاعات داده شده $P(A \mid B_1)$، $P(A \mid B_2)$ ، به‌ترتیب، برابر $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{10}$ هستند. به علاوه واضح است که $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. چون کیسه‌ی انتخابی یا کیسه‌ی اول است یا کیسه‌ی دوم. پس B_1 و B_2 فضای نمونه را افراز می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که $A \cap B_2$ و $A \cap B_1$ نیز A را افراز می‌کنند. پس :

$$P(A) = P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)\big) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

کار در کلاس صفحه ۵۹



با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید :

۱-این فرض که B_1 ، B_2 و ... B_n فضای نمونه را افراز می‌کنند؛ یعنی دو به دو از هم مجزا هستند و $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = S$.

۲-در این صورت $A \cap B_1$ ، $A \cap B_2$ و ... $A \cap B_n$ دو به دو از هم مجزا هستند و اجتماع آنها برابر A می‌شود. در نتیجه داریم :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

۳-اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

$$P(A) = P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)\big)$$
$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$
$$= P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \dots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

کار در کلاس صفحه ۵۹

میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برمی داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

B_1 : سیب انتخابی از باغ شمالی

B_3 : سیب انتخابی از باغ جنوبی

B_2 : سیب انتخابی از باغ مرکزی

A : پیشامد لکه‌دار بودن سیب انتخابی

$P(A \mid B_1) = \frac{10}{100}$ $\quad P(B_1) = \frac{3}{10}$

$P(A \mid B_2) = \frac{3}{100}$ $\quad P(B_2) = \frac{5}{10}$

$P(A \mid B_3) = \frac{5}{100}$ $\quad P(B_3) = \frac{2}{10}$

با استفاده از قانون احتمال کل داریم :

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3) = \frac{3}{100} + \frac{15}{100} + \frac{10}{100} = \frac{28}{100}$$

فعالیت صفحه ۶۱

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف)احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟

B_1 : سیب انتخابی از باغ شمالی ، B_2 : سیب انتخابی از باغ مرکزی ، B_3 : سیب انتخابی از باغ جنوبی

$P(B_1) = \frac{1}{3}$, $P(B_2) = \frac{1}{3}$, $P(B_3) = \frac{1}{3}$

ب)اکنون سیبی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟ بله

پ)به‌طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهدهی سیب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است. یا کاهش؟ افزایش پیدا کرده است.

کار در کلاس صفحه ۶۳

فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

B_1 : سیب انتخابی از باغ شمالی

B_2 : سیب انتخابی از باغ مرکزی

B_3 : سیب انتخابی از باغ جنوبی

A : پیشامد لکه‌دار بودن سیب انتخابی

$P(B_1)=\frac{1}{3}$ $\quad$ $P(A|B_1)=\frac{10}{100}$

$P(B_2)=\frac{1}{3}$ $\quad$ $P(A|B_2)=\frac{3}{100}$

$P(B_3)=\frac{1}{3}$ $\quad$ $P(A|B_3)=\frac{5}{100}$

با استفاده از قانون احتمال کل داریم :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{10}{300}+\frac{3}{300}+\frac{5}{300}=0/06$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{10}{100}}{0/06}=\frac{5}{9}$$

تمرین های صفحه ۶۴

۱. درباره‌ی خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

$۲^۴ = ۱۶$

(پ،پ،د،د)(د،د،پ،پ)(پ،د،د،پ)(د،پ،پ،د)(د،پ،د،پ)

۲. ستاد مرکزی معاینه‌ی فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال پرکارترین سال در عرصه-ی معاینه‌ی فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه‌ی فنی شده-اند. امسال یکی از سخت‌ترین سالهای مبارزه با آلودگی هوا بود...»

در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینه‌ی فنی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینه‌ی فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۴	۱۸

۸۷۰

۲۵۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

$$\frac{۲۵۸}{۸۷۰} = \frac{۸۶}{۲۹۰} = \frac{۴۳}{۱۴۵}$$

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره‌ی ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

$$\frac{۲۶}{۸۷۰}$$

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره‌ی ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

$$\frac{۲۶}{۷۹}$$

۳. بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره‌ی هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

اگر یک روز ساحل جزیره‌ی هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است=P(A)

اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد=P(B)

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$$

$$P((A_1 \cap A_2) \cap A_3 = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2|A_1)$$

۴. قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

$$P\left(A_3\middle|(A_1 \cap A_2)\right) = \frac{P(A_3 \cap (A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cap A_2)}$$

۵. قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه‌ی احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل اجرا است؟

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

۶. جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه‌ی تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامه‌ی تراکتور داشته باشد چقدراست؟

$$P(A) = 0/55 \quad P(B) = 0/45 \quad P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = 0/55x$$

۷. دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده ان را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{9}$$

۸. در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک راننده‌ی مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهتمایی، روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

$$P(A \cap B) = \frac{۰}{۶} \times \frac{۰}{۰۵} + \frac{۰}{۴} \times \frac{۰}{۰}۱ = ????$$

۹. در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه‌ٔ اول ۴ لامپ و در جعبه‌ی دوم ۳ لامپ معیوب است. از هرکدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

$$P(A \cap B) = \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۰} + \frac{۳}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۲}$$

۱۰. ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

$$P(A) = ۰/۵ \quad P(B) = ۰/۸ \quad P(A) = ۳\big(P(B)\big) \qquad P(A) = \frac{P(A \cap B)}{?????} =$$

۱۱. احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن زده ۰/۱ است.

$$P(A) = ۰/۰۰۲ \quad P(B) = ۰/۱$$

اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

$$P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{۰/۰۰۲ \times ۰/۹}{۰/۱}$$

۱۲. قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی : در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید. تا درستی آن را ببینید.

۱۳. با فرض شرایط قانون احتمال کل، ثابت کنید:

$$\min\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\} \le P(A) \le max\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

۱۴. فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A|B) \le P(A|C)$. ثابت کنید:

$$P(A|B) \le P(A|(B \cup C)) \le P(A|C)$$

۱۵. امیر و بابک عضو تیم ده نفره‌ی والیبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۲۰}$$

۱۶. علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال های ۰/۴ و ۰/۳ برای دیدن یک مسابقه‌ی ورزشی به ورزشگاه می-روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

$$P(A) = ۰/۴ \quad P(B) = ۰/۳ \quad P(B|A) = ۰/۸ \quad \frac{۰/۳ \times ۰/۸}{۰/۴}$$

۱۷.خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوان‌های یک مؤسسه‌ی انتشاراتی اند که به ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب ، ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

$$P(A) = ۰/۲ \quad P(B) = ۰/۳ \quad P(h) = ۰/۵ \quad P(A|(B \cap h)) = \frac{P(A).P(B???)}{P(A)}$$

۱۸. فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شماره‌ی کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۹. یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

$۰/۳ \times ۰/۴$

ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

$P(A) = ۰/۴ \quad P(B) = ۰/۲ \quad P(A|B) = ۰/۳۰ \quad \frac{۰/۳ \times ۰/۴}{۰/۱}$

درس چهارم : پیشامدهای مستقل و وابسته

فعالیت صفحه ۶۷

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱-فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A، B و $A \cap B$ را بنویسید.

$$S = \{(ر،۱),(ر،۲),(ر،۳),(ر،۴),(ر،۵),(ر،۶),(پ،۱),(پ،۲),\ldots\}$$

$$A = \{(ر،۶),(پ،۶)\}$$

$$B = \{(ر،۱),(ر،۲),(ر،۳),(ر،۴),(ر،۵),(ر،۶)\}$$

$$A \cap B = \{(ر،۶)\}$$

۲-احتمال وقوع پیشامدهای A، B و $A \cap B$ را تعیین کنید.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲}{۱۲} \quad , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۲}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید یعنی $P(A \mid B)$ را به‌دست آورید.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۶}{۱۲}} = \frac{۱}{۶}$$

۳-با مقایسه‌ی $P(A \mid B)$ و $P(A)$ آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع A داشته است؟

از اینکه هر دو احتمال با هم برابر شده‌اند وقوع پیشامد B تأثیری نداشته است.

۴-اگر $P(A \mid B) = P(A)$، چه رابطه‌ای بین $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cap B)$ برقرار است؟

$$\begin{cases} P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A \mid B) = P(A) \end{cases} \Longrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

۵-در تساوی $P(A \mid B) = P(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(B \mid A) = P(B)$ را نتیجه بگیرید.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(B) \Longrightarrow P(B \mid A) = P(B)$$

کار در کلاس صفحه ۶۹

۱-سکه‌ی سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده‌ی فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$A=\{(\text{پ،پ}),(\text{ر پ،}),(\text{پ ، ر}),(\text{ر ، ر})\}$ $\qquad P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

$B=\{(\text{،ر پ}),(\text{ر پ،})\}$ $\qquad P(B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

$A\cap B=\{(\text{،ر پ}),(\text{ر پ،})\}$ $\qquad P(A\cap B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

دو پیشامد مستقل نیستند زیرا :

$$\frac{۱}{۴}\neq\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

۲-در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B را پیشامد مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند؟

$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$ $\qquad P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ $\qquad P(B)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

$A\cap B=\emptyset$ $\qquad P(A\cap B)=۰$

A و B مستقل نیستند زیرا :

$$۰\neq\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۱۲}\quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

۳-در یک مسابقه‌ی تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

A : پیشامد به هدف زدن محمد

B : پیشامد به هدف زدن مرتضی

$$P(A)=\frac{۵}{۷}\quad,\quad P(B)=\frac{۷}{۱۰}\quad,\quad A\cap B=\frac{۵}{۷}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

کار در کلاس صفحه ۷۰

در مثال صفحه‌ی قبل، اگر مهره‌ی دوم را پس از جایگذاری مهره‌ی اول در جعبه بیرون آوریم. با محاسبه‌ی $P(B)$ و $P(B \mid A)$ ، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

وقتی مهره‌ی اول را جایگذاری می‌کنیم تعداد کل مهره‌ها ۱۳ می‌شود و داریم : $P(B \mid A) = \frac{۸}{۱۳}$ از طرفی $P(B) = \frac{۸}{۱۳}$

بنابراین $P(B) = P(B \mid A)$ و این یعنی دو پیشامد مستقل هستند.

تمرین صفحه ۷۱

۱-اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

فرض می‌کنیم A و B دو پیشامد ناسازگار باشند یعنی $A \cap B = \varnothing$ بنابراین داریم :

$$(۱) \quad P(A \cap B) = ۰$$

از طرفی اگر A و B مستقل باشند داریم :

$$(۲) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

و از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت :

$$P(A) \times P(B) = ۰ \Rightarrow P(A) = ۰ \ \text{یا} \ P(B) = ۰ \ \Rightarrow A = \varnothing \ \text{یا} \ B = \varnothing$$

بنابراین برای اینکه دو پیشامد ناسازگار مستقل از یکدیگر باشند، حداقل یکی از آنها باید تهی باشد.

۲-اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل اند؟ چرا؟

خیر، زیرا اگر E و F اشتراکشان تهی باشد آنگاه E و F مستقل نیستند. به عنوان مثال :

$$S = \{۵ , ۶ , ۷ , ۸\}$$

$$\begin{cases} A = \{۵ , ۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۲} \\ B = \{۵ , ۷\} \Rightarrow P(B) = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۴} \ , \ \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

حال زیر مجموعه‌های دو مجموعه‌ی A و B را در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} P(E) = \frac{۱}{۴} \\ P(F) = \frac{۱}{۴} \end{cases} , \ E \cap F = \varnothing \ \Rightarrow P(E \cap F) = ۰ \ \Rightarrow P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

پس نتیجه خواهیم گرفت که E و F مستقل نیستند.

۳-اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر مستقل‌اند.

الف) A' و B

باید نشان دهیم : $P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$

$$P(B \cap A') = P(A - B) = P(B) - P(B \cap A) \xrightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B} = P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$= P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(B) \times P(A')$$

ب) A' و B'

راه حل اول :

$$P(A' \cap B') = P(A' - B) = P(A') - P(A' \cap B) \xrightarrow{\text{با توجه به قسمت الف}} P(A') - P(A') \times P(B)$$
$$= P(A')\big(1 - P(B)\big) = P(A') \times P(B')$$

راه حل دوم : بدون استفاده از قسمت الف

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \underbrace{1 - P(A)}_{P(A')} - P(B) + P(A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به مستقل بودن } A \text{ و } B} = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = P(A') - P(B)(1 - P(A)$$
$$= P(A') - P(B) \times P(A') = P(A')\big(1 - P(B)\big) = P(A') \times P(B')$$

۴-در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهرشدن عدد ۲ در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B رابررسی کنید.

$$A = \{(۱،۲),(۲،۳),(۳،۴),(۴،۵),(۵،۶),(۲،۱),(۳،۲),(۴،۳),(۵،۴),(۶،۵)\}$$

$$B = \{(۳،۱),(۳،۲),(۳،۳),(۳،۴),(۳،۵),(۳،۶)\} \quad , \quad P(A \cap B) = \{(۳،۲),(۳،۴)\}$$

$$\begin{cases} P(A) = \dfrac{۱۰}{۳۶} \\ P(B) = \dfrac{۶}{۳۶} \\ P(A \cap B) = \dfrac{۲}{۳۶} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{۱۰}{۳۶} \times \frac{۶}{۳۶} \neq \frac{۲}{۳۶} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

۵-از مجموعه‌ی $\{۱،۲،۳، ...، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$\begin{cases} A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۰} \\ B=\{۳,۶,۹\} \Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۱۰} \\ P(A\cap B)=\{۶\} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰}\neq\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

A و B مستقل نیستند.

۶-احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

پیشامد موفقیت‌آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار اول را A و پیشامد موفقیت‌آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار دوم را B در نظر می گیریم. بنابراین با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد داریم :

$$P(A)=۰/۶ \quad , \quad P(B)=۰/۸$$

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۶\times ۰/۸=۰/۴۸$$

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

با توجه به این که هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، متمم آنها نیز مستقلند. داریم :

$$P(A')=۱-P(A)=۱-۰/۶=۰/۴$$
$$P(B')=۱-P(B)=۱-/۰۸=۰/۲$$
$$P(A'\cap B')=P\left(A'\right)\times P\left(B'\right)=۰/۴\times ۰/۲=۰/۰۸$$

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

هر گاه دو پیشامد مستقل باشند، هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است. بنابراین :

$$\begin{cases} P(A')=۰/۴ \\ P(B)=۰/۸ \end{cases} \Rightarrow P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)=۰/۴\times ۰/۸=۰/۳۲$$

۷-یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

روش اول :

$$n(S)=۲\times۶\times۶=۷۲ \quad , \quad A=\left\{\left(ر,۶,۶\right)\right\} \Rightarrow P(A)=\frac{۱}{۷۲}$$

روش دوم :

اگر A را پیشامد رو آمدن سکه و B را پیشامد ۶ آمدن دو تاس در نظر بگیریم این دو پیشامد از هم مستقل هستند.

بنابراین داریم :

$$\begin{cases} P(A)=\frac{1}{2} \\ P(B)=\frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{72}$$

۸-در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سوال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سوالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) به تمام سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

با توجه به اینکه پیشامدهای پاسخ دادن به هر سوال مستقل از سوال‌های دیگر است، داریم :

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{5}\right)^{10}=\frac{1}{5^{10}}$$

ب) تنها به پنج سوال اول پاسخ صحیح داده باشد.

برای پنج سوال اول که پاسخ صحیح داده باشد، داریم: $\left(\frac{1}{5}\right)^{5}=\frac{1}{5^{5}}$

و برای پنج سوال دوم داریم: $\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$

$$\frac{1}{5^5}\times\frac{4^5}{5^5}=\frac{4^5}{5^{10}}=\frac{(2^2)^5}{5^{10}}=\frac{2^{10}}{5^{10}}=(0/4)^{10}$$

پ) به نیمی از سوال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

در اینجا انتخاب پنج سوال از بین ده سوال را داریم و با توجه به قسمت ب داریم : $\binom{5}{10}\times(0/4)^{10}$

۹-در یک جعبه که شامل ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

دو پیشامد قرمز بودن مهره اول و مهره دوم مستقل از یکدیگرند و احتمال قرمز بودن هر مهره برابر است با $\frac{3}{6}$ بنابراین داریم :

$$\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

احتمال اینکه حداقل یک مهره آبی باشد، متمم احتمال این است که هیچکدام آبی نباشد :

احتمال اینکه هیچکدام آبی نباشد : $\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{16}{36}$

احتمال حداقل یک مهره آبی : $1-\frac{16}{36}=\frac{5}{9}$

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

هر دو مهره همرنگ باشند یعنی یا هردو قرمز باشند و یا هر دو آبی باشند.

$$\begin{cases}\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36} & \text{احتمال قرمز بودن هر دو مهره}\\ \frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36} & \text{احتمال آبی بودن هر دو مهره}\end{cases}\Longrightarrow \text{احتمال همرنگ بودن هر دو مهره}:\ \frac{9}{36}+\frac{4}{36}=\frac{13}{36}$$

۱۰-جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

این سه پیشامد از یکدیگر مستقلند. بنابراین :

$$\begin{cases}\text{احتمال معیوب بودن لامپ اول}=\frac{3}{12}\\ \text{احتمال معیوب بودن لامپ دوم}=\frac{2}{11}\\ \text{احتمال معیوب بودن لامپ سوم}=\frac{1}{10}\end{cases}\Longrightarrow \frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{220}$$

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

احتمال اینکه تمام لامپ‌ها سالم باشند را به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{9}{12}\times\frac{8}{11}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{55}$$

و با استفاده از احتمال متمم داریم :

احتمال اینکه حداقل یک لامپ معیوب باشد : $1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$

۱۱-احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه‌ی افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

احتمال عدم موفقیت دارو برای هر شخص: $1-0/9=0/1$

افراد از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین :

$$0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1\times0/1=(0/1)^{10}$$

۱۲-اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری که $P(A\cap B)=0/1$ و $P(A\cap B')=0/4$، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Longrightarrow 0/4=P(A)-0/1\Longrightarrow P(A)=0/5$$

با توجه به مستقل بودن A و B: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$۰/۱ = ۰/۵ \times P(B) \Rightarrow P(B) = ۰/۲ \Rightarrow P(B') = ۱ - ۰/۲ = ۰/۸$$
$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') \Rightarrow P(A \cup B') = ۰/۵ + ۰/۸ - ۰/۴ = ۰/۹$$